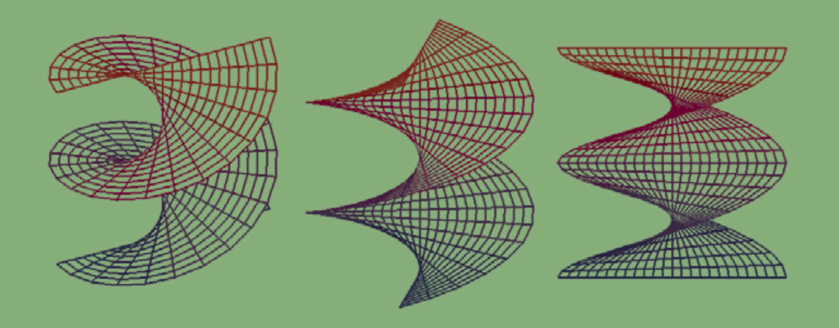
por

Ascensión Moratalla de la Hoz



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-18-06

PROBLEMAS RESUELTOS DE ISOMETRÍAS (I)

ISOMETRÍAS EN EL ESPACIO

por

ASCENSIÓN MORATALLA DE LA HOZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-18-06

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

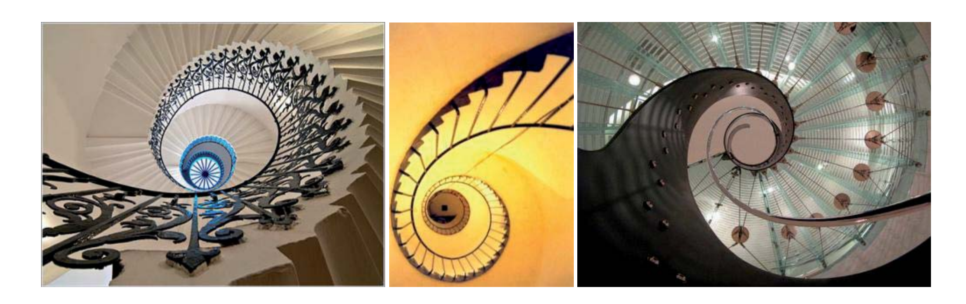
Problemas resueltos de isometrías (I).
Isometrías en el espacio.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 409.01 / 3-18-06
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-470-7
ISBN-13: 978-84-9728-471-4
Depósito Legal: M-20516-2013

INTRODUCCIÓN

Las isometrías o movimientos en el espacio afín euclídeo tridimensional E_3 son seguramente las transformaciones afines con las que estamos más familiarizados. La simetría ortogonal respecto de un plano, la rotación alrededor de una recta, el movimiento helicoidal, la traslación, son conceptos con los que nos encontramos a menudo en nuestra vida cotidiana. Pensemos en acciones como mirarnos a un espejo, montar en un tiovivo o subir por una escalera de caracol.

Desde el punto de vista matemático son aplicaciones afines **biyectivas** definidas en el espacio afín euclídeo E_3, $f: E_3 \rightarrow E_3$, con una característica importante: *conservan las distancias*. Como consecuencia de dicha propiedad se cumple que conservan los ángulos, el área y el volumen.
Es decir mover un objeto sólo afecta a la posición del objeto pero no a su forma.



Recordemos que una isometría por ser una aplicación afín, se puede expresar, respecto de una referencia ortonormal $R = \left(O, B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\right)$, de la siguiente manera

$$f(X) = b + \hat{f}(X)$$
$$f(X) = b + NX \quad \text{ó}$$
$$X' = b + NX$$

siendo $\hat{f}$ la aplicación lineal asociada a f y N su matriz respecto de la base B.
Por ser $\hat{f}$ una transformación ortogonal se cumplen las siguientes propiedades:

1. La matriz N es ortogonal: $NN^t = I$.
2. La aplicación f es biyectiva y $|N| = \pm 1$.
3. f conserva las distancias, los ángulos, las áreas y los volúmenes.
4. Los autovalores reales de $\hat{f}$ sólo pueden valer 1 o -1.
5. La composición de isometrías es una isometría.
6. Existe la isometría inversa, f^{-1}.

A lo largo del texto consideraremos las isometrías definidas en el espacio afín euclídeo E_3 respecto de la referencia ortonormal $R = \left(O, B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\right)$

1. TRASLACIONES

Recordar que estamos considerando las traslaciones del espacio E_3 respecto de la referencia ortonormal $R = \left(O, B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\right)$.

P1.1 Dada la traslación t de vector $\vec{v} = (2,1,3)$, se pide determinar:

1. La ecuación de *t*.
2. Las rectas invariantes por *t*.
3. La imagen de la recta $s: \begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$
4. La imagen del plano de ecuación $\pi: 2x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0$.
5. Las ecuaciones de la transformación $f \circ t$ siendo f la traslación de vector $\vec{u} = (-4,1,-3)$
6. La transformación inversa de *t*.

Solución

1. Geométricamente la traslación mueve el punto X al punto X' de manera que XX' es el vector $\vec{v}$

X $\vec{v}$ X'

$$XX' = \vec{v} \Rightarrow X' - X = \vec{v} \Rightarrow X' = X + \vec{v}$$

Considerando la aplicación identidad $i(X) = IX$, siendo I la matriz identidad de orden 3, podemos reescribir la expresión anterior como

$$t(X) = \vec{v} + IX$$

$$t(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Tomando $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $t(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + x_1 \\ y_2 = 1 + x_2 \\ y_3 = 3 + x_3 \end{cases}$$

Estas son distintas formas de expresar la traslación.

2. Si el vector de dirección de la recta r es proporcional al vector de traslación $\vec{v} = (2,1,3)$, entonces la recta es invariante.

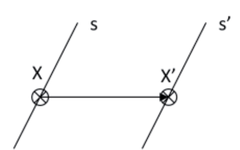
Si *r* es una recta paralela a la dirección del vector de traslación, será invariante ya que sus puntos se deslizarán por ella cuando se les aplique la traslación.

Por tanto $f(r)=r$

3. Comprobemos si la recta s es paralela a $\vec{v}$ sustituyendo las coordenadas de $\vec{v}$ en las ecuaciones de W_s, es decir, en las ecuaciones del subespacio vectorial asociado a la recta

$$W_s : \begin{cases} 2v_1 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \neq 0 \\ 2 + 1 + 3 \neq 0 \end{cases}$$
$$\vec{v} = (2,1,3)$$

Por tanto *s* no es paralela al vector de traslación y su imagen será una recta *s'* paralela a ella que pase por *X',* transformado del punto *X.*



Tomemos un punto *P* de *s* y hallemos su transformado $P' = t(P)$

$$P = (1,0,0) \Rightarrow P' = t(P) = (2,1,3) + (1,0,0) = (3,1,3)$$

La recta resultante, por ser paralela a *s,* cumple las siguientes ecuaciones

$$s' : \begin{cases} 2x_1 + x_3 + k_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + k_2 = 0 \end{cases}$$

Para determinar k_1 y k_2 sustituimos el punto *P*' en las ecuaciones anteriores y obtenemos los valores de k_1 y k_2

$$\begin{cases} 6 + 3 + k_1 = 0 \\ 3 + 1 + 3 + k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -9 \\ k_2 = -7 \end{cases}$$

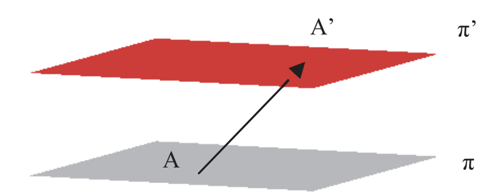
entonces

$$s' : \begin{cases} 2x_1 + x_3 - 9 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0 \end{cases}$$

4. En primer lugar comprobamos si el vector de traslación es paralelo a π, sustituyendo $\vec{v}$ en la ecuación de la dirección del plano

$$\left.\begin{matrix} W_\pi : 2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ \vec{v} = (2,1,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 + 1 + 3 \neq 0$$

Como vemos no son paralelos entonces la imagen de π es otro plano π' paralelo a π que pasa por el punto *A'*, transformado del punto *A* de π. El plano π no es invariante.



Tomemos el punto de π, *A*=(-1,0,0) y calculemos *A'*

$$A=(-1,0,0)\Rightarrow A'=t(A)=(2,1,3)+(-1,0,0)=(1,1,3)$$

Por ser π' paralelo a π escribimos

$$\pi': 2x_1+x_2+x_3+k=0$$

Como π' pasa por *A'* sustituimos las coordenadas de *A'* en la ecuación anterior

$$2+1+3+k=0\Rightarrow k=-6$$

por tanto la ecuación de π' es

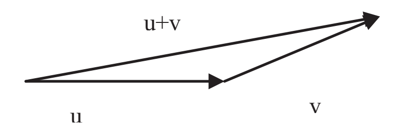
$$\pi': 2x_1+x_2+x_3-6=0$$

5. Vamos a componer dos traslaciones y ver cuál es el resultado final

$$(f\circ t)(X)=f(t(X))=\vec{u}+(\vec{v}+X)=(\vec{u}+\vec{v})+X$$

Por tanto la composición de dos traslaciones es otra traslación de vector la suma de los vectores de traslación de ambas traslaciones:

$$t_u\circ t_v=t_{u+v}$$



El vector de la traslación de f es $\vec{u}=(-4,1,-3)$ y el vector de traslación de t es $\vec{v}=(2,1,3)$ la composición de ambas aplicaciones es una traslación de vector $\vec{u}+\vec{v}$

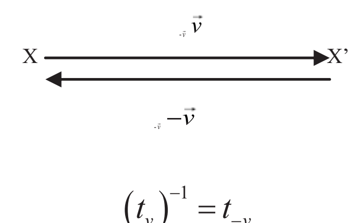
$$\vec{u}+\vec{v}=(-4,1,-3)+(2,1,3)=(-2,2,0)$$

$$(f\circ t)(X)=f(t(X))=(-2,2,0)+X$$

6. La transformación inversa de *t* es otra aplicación biyectiva t^{-1} tal que

$$t^{-1}\circ t=t\circ t^{-1}=id$$

Si $X' = \vec{v} + X \Rightarrow X = -\vec{v} + X'$ ecuación que representa a una traslación de vector $(-\vec{v})$.



$$\left(t_v\right)^{-1} = t_{-v}$$

Por tanto la solución a este apartado es la traslación de ecuación

$$t^{-1}(X) = \left(-2,-1,-3\right) + X$$

Si necesitas repasar cómo se resuelven las aplicaciones afines en general, puedes consultar el cuaderno de esta colección *Problemas resueltos de aplicaciones afines (II): Transformaciones en el espacio.*

TRASLACIONES

Sean t_u, t_v traslaciones definidas en el espacio E_3 con referencia ortonormal R. Se cumple:

- *Las traslaciones son isometrías.*
- *La matriz de la aplicación lineal asociada, respecto de R, es I.*
- $t_u \circ t_v = t_{u+v}$
- $\left(t_v\right)^{-1} = t_{-v}$
- *Las traslaciones de vector* $\vec{u} \neq (0,0,0)$ *son transformaciones que no dejan fijos los puntos del plano.*
- *Todas las rectas paralelas al vector de traslación son invariantes.*
- *Todas las rectas no paralelas al vector de traslación se transforman en rectas paralelas a sí mismas.*
- *Todos los planos paralelos al vector de traslación son invariantes.*
- *Todos los planos no paralelos al vector de traslación se transforman en planos paralelos a sí mismos.*

Traslación de una figura formando un friso



2. SIMETRÍAS ORTOGONALES

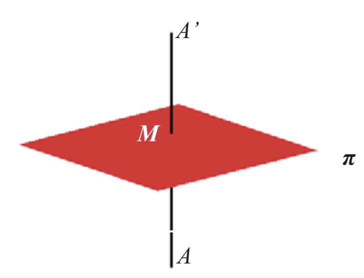
De la siguiente imagen podemos concluir que el agua se ha utilizado como un elemento arquitectónico más. El edificio, junto con su reflejo en el estanque, proporciona una imagen que denominamos simétrica. Frank Ghery, en la ampliación del museo del Louvre, añade una lámina de agua a su diseño para conseguir este efecto de simetría respecto del plano que contiene al estanque. La simetría a la que nos referimos es la simetría ortogonal respecto a un plano.



Pasemos a analizar estas isometrías del espacio E_3 recordando que las estamos considerando respecto de la referencia ortonormal $R = \left(O, B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\right)$.

Una simetría ortogonal respecto a un plano de E_3 es una trasformación $f(X) = b + \widehat{f}(X)$ que cumple las siguientes condiciones geométricas:

- Dado un punto A de E_3, y su transformado A' por la simetría, se cumple que el punto medio de A y A' pertenece a π.
- Los puntos del plano π son puntos fijos.
- El vector ortogonal al plano se transforma mediante $\widehat{f}$, en su opuesto.



Si π es el plano de E_3 que pasa por P y sus vectores de dirección son $\vec{u}$ y $\vec{v}$, llamando $\vec{w}$ al vector ortogonal a ambos se cumple

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\ \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$$

$$f(P) = P$$

P2.1 Hallar la ecuación de la simetría ortogonal respecto del plano $\pi : x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$.

Solución

Los vectores del plano son $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ y el vector ortogonal al plano es $\vec{w} = (1,1,-1)$. Como

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{v} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \hat{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\ \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases} \quad \text{tenemos}$$

$$f(P) = P$$

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) + \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_2) - \hat{f}(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

estas ecuaciones nos permiten hallar la matriz N de la aplicación lineal asociada $\hat{f}$ tal que $X' = b + NX$

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \frac{1}{3}\left(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right) \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\left(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right) \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = \frac{1}{3}\left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \end{cases} \Rightarrow N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como los puntos del plano son puntos fijos, hallamos b de la expresión $f(X) = X \Rightarrow b + NX = X$ para el punto $P = (1,0,0)$ del plano:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad b = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

P2.2 Sea f la simetría ortogonal respecto del plano $\pi : x_1 - x_3 + 5 = 0$, *r y m* las recta de ecuaciones: $r : \begin{cases} x_2 - 3 = 0 \\ x_1 + x_3 + 5 = 0 \end{cases}$ y $m : \begin{cases} x_2 - 3 = 0 \\ x_1 - x_3 - 5 = 0 \end{cases}$

1. Hallar la ecuación de *f*.
2. Hallar la expresión de f^{-1}.
3. Hallar las ecuaciones de la recta *f*(*r*).
4. Hallar las ecuaciones de la recta *f*(*m*).

Solución

1. Los vectores del plano son $\vec{u}=(1,0,1)$ $\vec{v}=(0,1,0)$ y el vector ortogonal al plano es $\vec{w}=(1,0,-1)$. Procediendo como en el ejercicio anterior obtenemos

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1+\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_2)=\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_1-\vec{e}_3)=-\vec{e}_1+\vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1)=\vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_2)=\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_3)=\vec{e}_1 \end{cases}$$

Utilizamos la condición que los puntos del plano son puntos fijos, para obtener *b*, de la ecuación $X=b+NX$. Tomando el punto $P=(0,0,5)$ del plano

$$b=(-5,0,5)$$

La ecuación de *f* es

$$f(X)=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}X$$

2. La aplicación inversa de una simetría especular es la propia simetría por tanto $f^{-1}=f$

3. Un punto de la recta *r* es *A*=(0,3,-5) y su vector de dirección es $\vec{w}=(1,0,-1)$
Para hallar la imagen de *r, r',* calculamos las imágenes de *A* y $\vec{w}$

$$A'=f(A)=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}'=\hat{f}(\vec{w})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La recta *r'* pasa por *A'* y su dirección es $\vec{w}'$, que coincide con $-\vec{w}$, por ser ortogonal al plano de simetría

$$r':\begin{cases} x_2-3=0 \\ x_1+x_3+5=0 \end{cases}$$

Observar que *r* se transforma en sí misma.

4. Un punto de la recta *m* es *A*=(0,3,-5) y su vector de dirección es $\vec{u}=(1,0,1)$ por tanto la recta es paralela al plano. Para hallar la imagen de *r, r',* calculamos las imágenes de *A* y $\vec{u}$

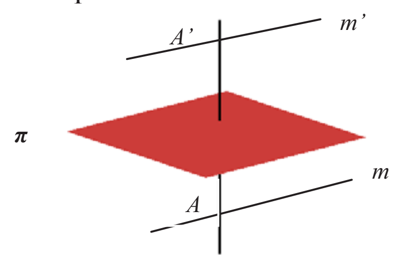
$$A'=f(A)=\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}'=\hat{f}(\vec{u})=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

La recta *m'* pasa por *A'* y su dirección es $\vec{u}'$, que coincide con $\vec{u}$ por ser paralela al plano de simetría

$$m':\begin{cases}x_2-3=0\\x_1-x_3+15=0\end{cases}$$

Observar que π , *m* y *m'* son paralelos



P2.3 Sean $\pi_1: x_2+x_3-2=0$ y $\pi_2: x_2+x_3+3=0$ planos de E_3 .

1. Hallar la ecuación de la simetría ortogonal respecto del plano π_1, *f.*
2. Hallar la ecuación de la simetría ortogonal respecto del plano π_2, *g.*
3. Hallar la ecuación de la composición $f\circ g$.
4. Clasificar $f\circ g$.

Solución

1. Los vectores del plano π_1 son $\vec{u}=(0,1,-1)$ $\vec{v}=(1,0,0)$ y el vector ortogonal al plano es $\vec{w}=(0,1,1)$ entonces

$$\begin{cases}\hat{f}(\vec{e}_2-\vec{e}_3)=\vec{e}_2-\vec{e}_3\\\hat{f}(\vec{e}_1)=\vec{e}_1\\\hat{f}(\vec{e}_2+\vec{e}_3)=-\vec{e}_2-\vec{e}_3\end{cases}$$

estas ecuaciones nos permiten hallar la matriz *N* de la aplicación lineal asociada tal que $X'=b+NX$

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_2) - \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) + \hat{f}(\vec{e}_3) = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = -\vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como los puntos del plano son puntos fijos, despejamos b de la expresión $X = b + NX$. Tomemos el punto $P = (0,0,2)$ del plano π₁, se cumple que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Al ser el plano π_2 paralelo a π_1, la simetría respecto de π_2 tendrá la misma matriz asociada *N* y una expresión del siguiente tipo

$$g(X) = c + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Los puntos del plano π_2 son puntos fijos, el punto $Q = (0,0,-3)$ del plano cumple que

$$g(Q) = c + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} Q \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = c + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

componemos

$$\left(f \circ g\right)(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X\right)$$

$$\left(f \circ g\right)(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

La composición de estas simetrías es una traslación de vector ortogonal a los planos π_1 y π_2.

P2.4 Sean $\pi_1 : x_2 + x_3 - 2 = 0$ y $\pi_2 : x_1 - x_2 + 1 = 0$ planos de E_3

1. Hallar la ecuación de la simetría ortogonal respecto del plano π_1, f.
2. Hallar la ecuación de la simetría ortogonal respecto del plano π_2, g.
3. Hallar la ecuación de la composición $f \circ g$.
4. Clasificar $f \circ g$

Solución

1. La ecuación de la simetría f según el problema P2.3 es

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

2. Los vectores del plano π_2 son $\vec{u} = (1,1,0)$ $\vec{v} = (0,0,1)$ y el vector ortogonal al plano es $\vec{w} = (1,-1,0)$ entonces

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

Igual que antes, estas ecuaciones nos permiten hallar la matriz N de la aplicación lineal asociada

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_1) - \hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos b de la expresión $X' = b + NX$, tomando el punto $P = (0,1,0)$ del plano. Como los puntos del plano son puntos fijos, cumple que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

componemos

$$(f \circ g)(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \right]$$

$$h(X) = (f \circ g)(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$$

Clasifiquemos la isometría resultante. Llamemos M a la matriz de su aplicación lineal asociada.

- h es una isometría porque la composición de isometrías es una isometría. Lo podemos comprobar mediante el producto $MM^t = I$.
- El determinante de M es 1.
- Calculemos los puntos fijos de h

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

lo cual significa que hay una recta de puntos fijos por lo tanto es una rotación alrededor de dicha recta. Además dicha recta es la intersección de los planos de ambas simetrías.

Concluimos que la composición de simetrías no siempre es una simetría.

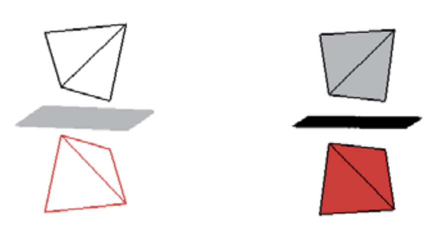
SIMETRÍAS ORTOGONALES

Sea f *la simetría ortogonal respecto del plano* $\pi : X = P + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ del espacio E_3, *y* $f(X) = b + NX$ *su expresión respecto de la referencia ortonormal R de* E_3. *Se cumple:*

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\ \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$$

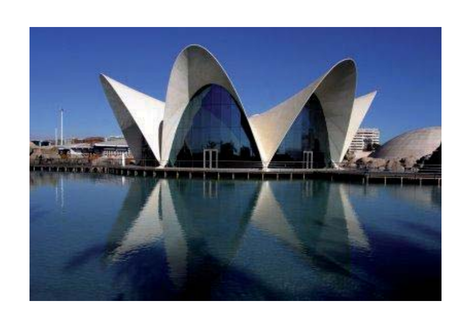
$$f(P) = P$$

- *f es una isometría.*
- *La aplicación lineal asociada* $\hat{f}$ *es una transformación ortogonal.*
- *Su matriz N es ortogonal:* $NN^t = I$.
- *La aplicación* f *es biyectiva y* $\det(N) = -1$.
- *Existe la aplicación inversa,* $f^{-1} = f$.
- $\hat{f}$ *es diagonalizable.*
- *Los autovalores de* $\hat{f}$ *son:* $\lambda_1 = 1$ *con multiplicidad 2 y* $\lambda_2 = -1$ *con multiplicidad 1.*
- *El subespacio propio asociado a* $\lambda_1 = 1$ *está generado por los vectores* $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *del plano.*
- *El subespacio propio asociado a* $\lambda_2 = -1$ *está generado por el vector* $\vec{w}$ *ortogonal al plano.*
- *El plano π es un plano de puntos fijos.*
- *Los planos ortogonales a π son planos invariantes.*
- *Las rectas ortogonales a π son rectas invariantes.*
- *Las rectas paralelas a π se transforman en rectas paralelas a sí mismas.*
- *Los planos paralelos a π se transforman en planos paralelos a sí mismos.*



3. ROTACIONES

En estas fotografías de la obra de Félix Candela se aprecia cómo los paraboloides hiperbólicos se distribuyen en torno a un eje para configurar la cubierta. A partir de uno de ellos y mediante consecutivos giros podríamos obtener la figura completa.





Recuerda que estamos considerando las isometrías del espacio afín euclídeo E_3 respecto de la referencia ortonormal $R=\left(O,B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\right)$

Una rotación alrededor de un eje es una transformación afín del espacio y su ecuación es por tanto de la forma

$$f(X)=b+NX$$

La aplicación lineal asociada es una transformación ortogona, eso significa que $\hat{f}$ conserva el producto escalar, su matriz N es ortogonal y regular y cumple que

$$NN^t=I$$
$$\det(N)=1$$

T’ T T’ T

Estos dos poliedros *T* y *T’*, están relacionados porque uno es el transformado del otro mediante una rotación, *f(T)=T’*. Tienen la misma forma, cada lado de *T* mide lo mismo que su transformado, al igual que sus ángulos.
La ecuación de una rotación alrededor del eje *OZ* y ángulo *α* es

$$f(X)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0\\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$$

Y se cumple que

$$f(X)=X \quad \forall X\in OZ$$

Es decir, el eje de rotación es una recta invariante, de puntos fijos, de la transformación.

P3.1 Sea *f* una rotación alrededor de la recta $r:\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ y ángulo $\alpha = 90^\circ$. Hallar su ecuación.

Solución
La ecuación de un giro alrededor del eje *OZ* es

$$G(X) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Como la recta *r* es paralela al eje OZ entonces será de la forma

$$f(X) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Es decir es la composición de un giro con una traslación

$$f(X) = (t \circ G)(X)$$

Como en este caso, el ángulo es de 90º la ecuación queda

$$f(X) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

De los giros sabemos que los puntos del eje de rotación, son puntos fijos: $f(X) = X$. Tomemos el punto P=(2,-1,0) perteneciente al eje de rotación

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La expresión matricial de *f* es

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

P3.2 Sea f la aplicación $f(X)=\begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X$. ¿Es una rotación? En caso afirmativo hallar el eje de rotación.

Solución
Los giros se caracterizan porque la matriz *N* es ortogonal, el determinante de *N* es 1 y tienen una recta de puntos fijos. Comencemos comprobando si la matriz es ortogonal:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por tanto *N* es ortogonal. Veamos el determinante : $\det(N)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{vmatrix}=1$

Hallemos los puntos fijos Tomando $X=(x_1,x_2,x_3)$

$$f(X)=X \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

De esta expresión se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}x_2=-1\\x_3=-4\end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas de una recta paralela al eje *OX*. Concluimos que la aplicación f es una rotación alrededor de la recta anterior .

P3.3 Se considera el giro $f(X)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X$. Hallar f^{-1} .

Solución

Comencemos calculando los puntos fijos de la aplicación f.

$$X=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\beta\\x_2=1\\x_3=0\end{cases}$$

La recta de puntos fijos es una recta paralela al eje *OX y* la expresión de f es del tipo

$$f(X)=b+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&-sen(\alpha)\\0&sen(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}X$$

Si lo comparamos con los datos del problema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = 0 \\ sen(\alpha) = -1 \end{cases}$$

vemos que el ángulo de giro es de 270º.

Para hallar f^{-1} despejamos X en función de Y. Escribiendo la expresión de f de la siguiente manera

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X \;\Rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left[Y - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

como la matriz N es ortogonal se cumple que $N^{-1} = N^{t}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{t} \left[Y - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \;\Rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

Clasifiquemos esta nueva isometría. Su matriz es N^t, por tanto es ortogonal. Su determinante coincide con el de N, por tanto es 1. Los puntos fijos cumplen

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

que coincide con la recta de puntos fijos de f. Así pues, f es un giro alrededor del eje X. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta ser una rotación alrededor del mismo eje que f pero de ángulo $-\alpha$

P3.4 Se consideran el giro $f(X)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X$ y el giro $g(X)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}X$. Hallar la aplicación $f\circ g$ y clasificar.

Solución

$$(f\circ g)(X)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}X\right]=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-1&0\end{pmatrix}X$$

Aunque sabemos que la composición de isometrías es una isometría, comprobemos que la matriz de la aplicación lineal es ortogonal

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-1&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Para clasificar calculamos el determinante y los puntos fijos. Veamos el determinante

$$\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-1&0\end{vmatrix}=1$$

Calculemos los puntos fijos:

$$X=f(X)\Rightarrow X=b+MX\Rightarrow IX=b+MX\Rightarrow (M-I)X=-b$$

$$X=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}X \Rightarrow \begin{cases}x_1=\left(2+\sqrt{3}\right)\alpha\\ x_2=1-\alpha\\ x_3=\alpha\end{cases}$$

La solución es una recta. Podemos afirmar que *f* es un giro alrededor de la recta de puntos fijos.

P3.5 Sea *f* una rotación alrededor de la recta $r:(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)+k(1,1,0)$ y ángulo $\alpha=90^\circ$. Hallar su ecuación.

Solución

La ecuación de un giro de eje *OX* es

$$G(X)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha)\\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}X$$

Llamemos *N* a la matriz de *G*. Como la recta *r* no es paralela al eje *OX,* entonces la expresión de *f* será de la forma

$$f(X)=b+MX$$

tal que $M=PNP^t$ donde *P* es la matriz de paso de la base *B'*, base ortonormal orientada positivamente en la que el giro tiene asociada la matriz *N*, a la base *B*. El primer elemento de la base *B*' es el vector de dirección de la recta *r*. Sea $B'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),(0,0,1)\right\}$. La matriz de cambio de base *P* está formada por los vectores de *B'*

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por ser *B'* ortonormal, la matriz *P* es ortogonal y $P^{-1}=P^t$.

La relación entre *M* y *N* es de semejanza

$$M=PNP^{-1}=PNP^t$$

Como el ángulo es de 90º, queda

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha)\\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}$$

De los giros sabemos que los puntos del eje de giro son puntos fijos:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=b+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{b}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

La expresión matricial de *f* es

$$f(X)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}X$$

P3.6 Sea $f(X)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}X$. Clasifica la isometría *f*.

Solución

Planteamos la condición que debe cumplir la matriz de una isometría

$$NN^t=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}^t=I$$

El valor de su determinante es: $|N|=1$

Veamos si tiene puntos fijos: $f(X)=X\Rightarrow(N-I)X=-b$.

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es

$$X=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}X\Rightarrow\begin{cases}x_1=1+\alpha\\ x_2=\alpha\\ x_3=2-\alpha\end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es la recta de puntos fijos, por tanto se trata de un giro alrededor de dicha recta. Para calcular el ángulo de giro estudiemos el ángulo que forman un vector ortogonal a la recta y su imagen. El vector de la recta es $\vec{u}=(1,1,-1)$, y un vector ortogonal a $\vec{u}$ es $\vec{v}=(1,0,1)$. La imagen de este vector es $\hat{f}(\vec{v})=(-1,1,0)$ y el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\hat{f}(\vec{v})$ lo obtenemos de la expresión

$$\vec{v}\cdot\hat{f}(\vec{v})=\|\vec{v}\|\left\|\hat{f}(\vec{v})\right\|\cos\beta \Rightarrow (1,0,1)\cdot(-1,1,0)=\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\beta \Rightarrow \cos\beta=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\beta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{2\pi}{3}\\[2mm] \beta=\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$

Calculemos el giro correspondiente a cada valor de β obtenido (ver ejercicio P3.5).

Utilizando la base ortonormal orientada positivamente

$$B'=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)\right\}$$

tenemos como matriz de paso la matriz P

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Siendo $N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha)\\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ se debe cumplir que $M=PNP^{-1}=PNP^{t}$.

Por tanto

$$\text{Si } \beta=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow PNP^{t}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq M$$

$$\text{Si } \beta=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow PNP^{t}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=M$$

Concluimos que el ángulo de giro es $\beta=\dfrac{4\pi}{3}$.

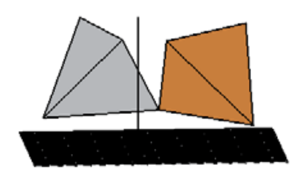
ROTACIONES

Sea f una rotación en E_3 alrededor de la recta r y de ángulo α, y $f(X) = b + NX$ su expresión respecto de la referencia ortonormal R de E_3,

- *f es una isometría.*
- *La aplicación lineal $\hat{f}$ asociada es una transformación ortogonal.*
- *Su matriz N es ortogonal: $NN^t = I$.*
- *La aplicación f es biyectiva, $\det(N) = 1$.*
- *Existe la transformación afín inversa para todo giro y es otro giro alrededor de la misma recta y ángulo (-α).*

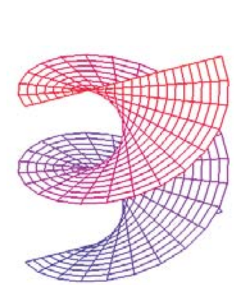
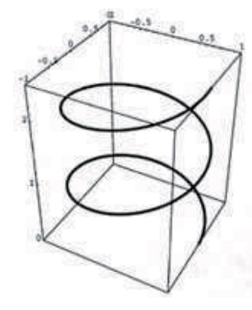
$$(G_r^{\alpha} \circ G_r^{-\alpha})(X) = X$$

- *Los autovalores de $\hat{f}$ son:*
  - *$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 1.*
  - *$\lambda_2 = \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)$ con multiplicidad 1.*
  - *$\lambda_3 = \cos(\alpha) - i\,\mathrm{sen}(\alpha)$ con multiplicidad 1.*
- *El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ está generado por el vector $\vec{u}$ de la recta r.*
- *Si α=180º, el movimiento se denomina también simetría central.*
- *f transforma puntos en puntos, rectas en rectas y planos en planos.*
- *Los puntos fijos de f son los de r.*



4. MOVIMIENTO HELICOIDAL

Una forma gráfica de entender el movimiento helicoidal es a través de la curva denominada hélice, que describe la posición de un punto que sigue una trayectoria helicoidal. El punto va girando en torno a un eje y a la vez desplazándose paralelo a dicho eje.
El helicoide es una superficie que también nos ayuda a comprender este movimiento.

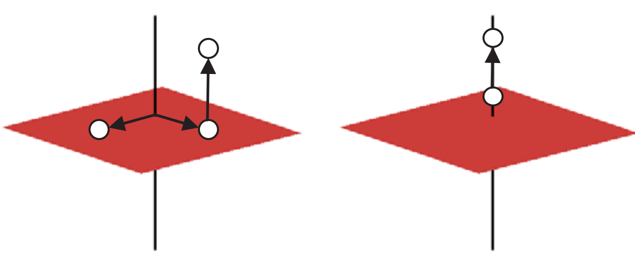
Veamos cómo se describe esta isometría. Recuerda que estamos considerando las isometrías del espacio afín euclídeo E_3 respecto de la referencia ortonormal $R=\left(O,B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\right)$.

Sea $g(X)=a+NX$ una rotación alrededor de la recta $r:X=P+\beta\vec{v}$, un ángulo α y sea $t(X)=\vec{u}+X$ una traslación de vector paralelo a r. La composición $t\circ g$ es un movimiento helicoidal y su expresión respecto de la referencia ortonormal *R de E_3,* es

$$f(X)=b+NX$$

La matriz de $\hat{f}$ es la de $\hat{g}$ pues es el producto de las matrices asociadas a ambas aplicaciones lineales $N=I\cdot N$

¿En qué se diferencia, entonces, un movimiento helicoidal de una rotación, si la matriz es la misma?
Después de realizar el giro hay un desplazamiento paralelo al eje de rotación lo que hace que ningún punto sea un punto fijo, ni siquiera los del eje de rotación que se van a desplazar a lo largo del eje.



P4.1 Sea $g(X)=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X$ un giro y t la traslación de vector $\vec{u}=(5,0,0)$ paralelo al eje de giro.

a) Hallar la transformación composición $f = t \circ g$
b) Determinar sus puntos fijos.
c) Determinar una recta invariante.

Solución
a) Componemos *g* con *t*

$$f(X) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow f(X) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Por ser *g* y *t* isometrías la aplicación *f* también es una isometría, con determinante 1.

b) Calculamos los puntos fijos.
Ecuación de los puntos fijos:

$$X = f(X) \Rightarrow X = b + MX \Rightarrow IX = b + MX \Rightarrow (M - I)X = -b$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema es incompatible lo que significa que la isometría *f* no tiene puntos fijos. Por tanto es un movimiento helicoidal.

c) El eje de giro *r,* de la rotación *g* es un recta invariante porque los puntos de *r* se transforman en puntos de *r*.

P4.2 Sea $g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$ un giro y t la traslación de vector $\vec{u} = (1,1,0)$ no paralelo al eje de giro.

a) Hallar la transformación composición $f = t \circ g$
b) Determinar sus puntos fijos.
c) Determinar una recta invariante.

Solución
a) Componemos *g* con *t*

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow f(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Por ser *g* y *t* isometrías la aplicación *f* también es una isometría. con determinante 1.

b) Calculamos los puntos fijos.

Llamemos M a la matriz de $\hat{f}$. Ecuación de los puntos fijos:

$$X = f(X) \Rightarrow X = b + MX \Rightarrow IX = b + MX \Rightarrow (M - I)X = -b$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este sistema es incompatible lo que significa que la isometría f no tiene puntos fijos. Por tanto es un movimiento helicoidal.

c) En este caso el vector de la traslación no es paralelo al eje de rotación *r*, de *g*.

Para calcular una recta invariante recurrimos a las direcciones invariantes de $\hat{f}$

Llamemos *M* a la matriz de $\hat{f}$. El autovalor real de la matriz de $\hat{f}$ es $\lambda = 1$.

Hallemos el subespacio propio asociado al autovalor 1.

$$(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones cartesianas de este subespacio son

$$\begin{cases} v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

La condición que debe cumplir un subespacio afín invariante *F,* cuando *f* es biyectiva, es

$$\overrightarrow{Pf(P)} \in W \quad \forall P \in F, \quad W \text{ subespacio vectorial invariante de } \hat{f}$$

En nuestro caso

$$W = (M - \lambda I)$$

$$P = (x_1, x_2, x_3), \; f(P) = (1 + x_1, 3 + x_3, 1 - x_2), \quad \overrightarrow{Pf(P)} = f(P) - P$$

$$\overrightarrow{Pf(P)} = (1 + x_1 - x_1, 3 + x_3 - x_2, 1 - x_2 - x_3) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{Pf(P)} = (1, 3 + x_3 - x_2, 1 - x_2 - x_3)$$

vector que debe cumplir la ecuación del subespacio propio $(M - \lambda I)$

$$\overrightarrow{Pf(P)} \in (M - \lambda I) \Rightarrow \begin{cases} 3 + x_3 - x_2 = 0 \\ 1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

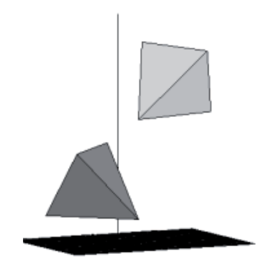
La recta de ecuaciones $\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ es invariante.

MOVIMIENTO HELICOIDAL

Sea $g(X) = b + NX$ *una rotación alrededor de la recta* $r : X = P + \beta\vec{v}$*, un ángulo α y sea* $t(X) = \vec{u} + X$ *una traslación de vector paralelo a r. La composición* $t \circ g$ *es un movimiento helicoidal y su expresión respecto de la referencia ortonormal R de* E_3 *es* $f(X) = b + NX$.

Cumple:

- *f es una isometría.*
- *La aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal de matriz N .*
- *Su matriz N es ortogonal:* $NN^t = I$.
- *La aplicación* f *es biyectiva,* $\det(N) = 1$.
- *Existe la transformación inversa .*
- *Los autovalores de* $\hat{f}$ *son:*
  λ_1 *=1 con multiplicidad 1.*
  λ_2 *=cos(α)+isen(α) con multiplicidad 1 .*
  λ_3 *=cos(α)-isen(α) con multiplicidad 1 .*
- *El subespacio propio asociado a* λ_1 *=1 está generado por el vector* $\vec{v}$ *de la recta r.*
- *f transforma puntos en puntos, rectas en rectas y planos en planos.*
- *f no tiene puntos fijos.*
- *La recta r es una recta invariante.*



5. SIMETRÍA CON DESLIZAMIENTO

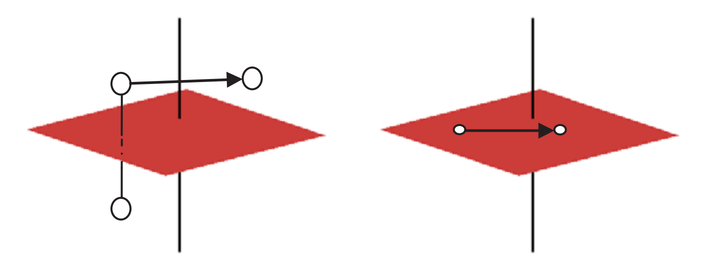
La simetría con deslizamiento es el resultado de la composición de una simetría ortogonal con una traslación de vector paralelo al plano de simetría.



Sea $s(X) = a + NX$ una simetría ortogonal respecto del plano $\pi : X = P + \beta\vec{v} + \mu\vec{w}$, y sea $t(X) = \vec{u} + X$ una traslación de vector paralelo a π. La composición $t \circ s$ es una simetría con deslizamiento y su expresión respecto de la referencia ortonormal *R de E₃,* es de la forma $f(X) = b + NX$

La matriz de $\hat{f}$ es la de $\hat{s}$ pues es el producto de las matrices asociadas a ambas aplicaciones lineales $N = I \cdot N$

¿En qué se diferencia, entonces, una simetría con deslizamiento de una simetría ortogonal si la matriz es la misma?
Después de realizar la simetría, hay un desplazamiento paralelo al plano de simetría lo que hace que ningún punto sea un punto fijo, ni siquiera los del plano de simetría que se van a desplazar a lo largo del plano al que pertenecen.



P5.1. Sea s la simetría ortogonal respecto del plano $\pi : x_1 - x_3 + 5 = 0$ y t la traslación de vector $\vec{u} = (1,0,1)$ paralelo al plano.
a) Hallar la simetría con deslizamiento $f = t \circ s$
b) Determinar sus puntos fijos.
c) Determinar un plano invariante.

Solución
a) Por el ejercicio P2.2 sabemos que la expresión de s es

$$s(X) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$$

Componemos s con t

$$f(X)=(t\circ s)(X)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}X$$

Por ser *s* y *t* isometrías la aplicación f también es una isometría. Observar que la matriz de este movimiento es la matriz de *s*. Por tanto el valor del determinante es -1

$$\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1$$

b) Sea M la matriz asociada a $\hat{f}$. Ecuación de los puntos fijos:

$$X=f(X)\Rightarrow X=b+MX\Rightarrow IX=b+MX\Rightarrow(M-I)X=-b$$

$$X=\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}X\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}$$

Este sistema es incompatible lo que significa que la isometría f no tiene puntos fijos. Por tanto es una simetría con deslizamiento.

c) El plano de simetría de *s*, π, es un plano invariante porque los puntos de π se transforman por *f* en puntos de *π*.

P5.2. Sea s la simetría ortogonal respecto del plano $\pi: x_1-x_3+5=0$ y t la traslación de vector $\vec{u}=(1,1,0)$ no paralelo al plano.

a) Hallar la transformación composición $f=t\circ s$

b) Clasificar *f*.

c) Determinar un plano invariante.

Solución

a) Por el ejercicio P2.2 sabemos que la expresión de *s* es

$$s(X)=\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}X$$

Componemos s con *t*

$$f(X)=(t\circ s)(X)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}X$$

b) Por ser s y t isometrías la aplicación f también es una isometría. Para clasificarla calculamos primero el determinante y a continuación los puntos fijos.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Ecuación de los puntos fijos:

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Este sistema es incompatible lo que significa que la isometría f no tiene puntos fijos. Por tanto es una simetría con deslizamiento.

c) En este caso el vector de la traslación no es paralelo al plano de simetría π, de *s*.

Para calcular un plano invariante recurrimos a las direcciones invariantes de $\hat{f}$

Los autovalores de la matriz de $\hat{f}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

Hallemos el subespacio propio asociado al autovalor 1.

$$(N - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación cartesiana de este subespacio es $v_1 - v_3 = 0$

Un subespacio afín F que cumple

$$\overrightarrow{Pf(P)} \in (N - \lambda I) \quad \forall P \in F$$

es invariante. Calculemos F

$$P = (x_1, x_2, x_3),\ f(P) = (-4 + x_3, 1 + x_2, 5 + x_1), \quad \overrightarrow{Pf(P)} = f(P) - P$$

$$\overrightarrow{Pf(P)} = (-4 + x_3 - x_1, 1 + x_2 - x_2, 5 + x_1 - x_3) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{Pf(P)} = (-4 + x_3 - x_1, 1, 5 + x_1 - x_3)$$

vector que debe cumplir la ecuación del subespacio propio $(N - \lambda I)$

$$\overrightarrow{Pf(P)} \in (N - \lambda I) \Rightarrow$$

$$-4 + x_3 - x_1 - 5 - x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$2x_3 - 2x_1 - 9 = 0$$

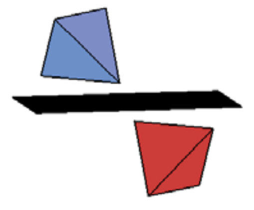
El plano de ecuación $2x_3 - 2x_1 - 9 = 0$ es un plano invariante.

SIMETRÍA CON DESLIZAMIENTO

Sea $g(X) = b + NX$ *la simetría ortogonal respecto del plano* $\pi : X = P + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ *y sea* $t(X) = \vec{w} + X$ *una traslación de vector paralelo a π. La composición* $t \circ g$ *es una simetría con deslizamiento y su expresión respecto de la referencia ortonormal R de* E_3, $f(X) = b + NX$.

Cumple:

- *f es una isometría.*
- *La aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal de matriz N.*
- *Su matriz N es ortogonal:* $NN^t = I$.
- *La aplicación* f *es biyectiva,* $\det(N) = -1$.
- *Existe la aplicación inversa.*
- $\hat{f}$ *es diagonalizable.*
- *Los autovalores de* $\hat{f}$ *son:*
  $\lambda_1 = 1$ *con multiplicidad 2 .*
  $\lambda_2 = -1$ *con multiplicidad 1.*
- *El subespacio propio asociado a* $\lambda_1 = 1$ *está generado por los vectores* $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *del plano.*
- *El subespacio propio asociado a* $\lambda_2 = -1$ *está generado por el vector* $\vec{w}$ *ortogonal al plano.*
- *f no tiene puntos fijos.*
- *π es un plano invariante.*
- *f transforma puntos en puntos, rectas en rectas y planos en planos.*



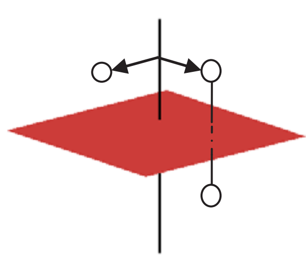
6. SIMETRÍA ROTACIONAL

La composición de una rotación alrededor de una recta y la simetría ortogonal respecto de un plano perpendicular a la recta de giro, da como resultado una nueva isometría que se denomina simetría rotacional.

Veamos cómo se describe esta isometría.

Sea $G_r(X)=a+MX$ una rotación alrededor de la recta $r: X=P+\beta\vec{v}$, un ángulo α y sea $S_\pi(X)=c+LX$ una simetría ortogonal respecto del plano π tal que π es ortogonal a *r*. La composición $f=S_\pi\circ G_r$ es un movimiento en E_3 cuya expresión respecto de la referencia ortonormal *R de* E_3, es $f(X)=b+NX$

La matriz de $\hat{f}$ es el producto de las matrices asociadas a ambas aplicaciones lineales $N=L\cdot M$



El punto fijo de esta isometría es la intersección de *r* y π y, tanto el plano π como la recta *r,* son subespacios invariantes de esta transformación.

P6.1 Sea el giro $g(X)=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}X$ y $s(X)=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}X$ simetría especular.

a) Hallar la transformación composición $f=s\circ g$

b) Determinar sus puntos fijos.

c) Determinar una recta invariante por *f.*

d) Determina un plano invariante por *f.*

Solución

a) Componemos *g* con *s*

$$f(X)=(s\circ g)(X)=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}X\right]$$

$$f(X)=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}X$$

Por ser g y s isometrías, la aplicación f también es una isometría, y en este caso con determinante -1.

b) Calculamos los puntos fijos.

$$X = f(X) \Rightarrow X = b + MX \Rightarrow IX = b + MX \Rightarrow (M - I)X = -b$$

Ecuación de los puntos fijos:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es el punto (1,0,2). Por tanto esta isometría tiene un punto fijo. Es una simetría rotacional.

c) El eje de la rotación g es invariante respecto de f. Resolvemos la ecuación de los puntos fijos para g

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

La recta $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ es una recta invariante de esta isometría.

d) El plano se simetría de s es invariante respecto de f. Resolvemos la ecuación de los puntos fijos para s

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x_2 + x_3 = 2$$

El plano $x_2 + x_3 = 2$ es un plano invariante de esta transformación.

P6.2 Sea el giro $g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$ y $s(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$ la simetría especular

a) Hallar la transformación composición $f = s \circ g$

b) Determinar sus puntos fijos.

c) Determinar una recta invariante por f.

d) Determina un plano invariante por f.

Solución

a) Componemos g con s

$$f(X)=(s\circ g)(X)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X\right]$$

$$f(X)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}X$$

Por ser g y s isometrías la aplicación f también es una isometría, con determinante -1

b) Calculamos los puntos fijos de f. Sea M la matriz asociada a $\hat{f}$.
Ecuación de los puntos fijos:

$$X=f(X)\Rightarrow X=b+MX\Rightarrow IX=b+MX\Rightarrow(M-I)X=-b$$

$$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}X\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Este sistema es compatible determinado lo que significa que la isometría f tiene un punto fijo. La solución del sistema es $P=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

c) En este caso la recta del giro y el plano de simetría no son ortogonales.
Para calcular una recta invariante de f recurrimos a las direcciones invariantes de $\hat{f}$.

El autovalor real de la matriz de $\hat{f}$ es λ =-1. Hallemos el subespacio propio asociado al autovalor -1.

$$(M-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Las ecuaciones cartesianas de este subespacio son $\begin{cases}v_1+v_3=0\\v_1+v_2=0\end{cases}$

La condición que debe cumplir el subespacio afín invariante F que buscamos es

$$\overrightarrow{Pf(P)}\in(M-\lambda I)\quad\forall P\in F$$

nos queda

$$P=(x_1,x_2,x_3),\ \ f(P)=(1+x_3,1+x_1,1-x_2),\quad \overrightarrow{Pf(P)}=f(P)-P$$
$$\overrightarrow{Pf(P)}=(1+x_3-x_1,1+x_1-x_2,1-x_2-x_3)\Rightarrow$$
$$\overrightarrow{Pf(P)}=(1+x_3-x_1,1+x_1-x_2,1-x_2-x_3)$$

vector que debe cumplir la ecuación del subespacio propio $(M-\lambda I)$

$$\overrightarrow{Pf(P)}\in(M-\lambda I)\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}1+x_3-x_1+1-x_2-x_3=0\\1+x_3-x_1+1+x_1-x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}2-x_1-x_2=0\\2-x_2+x_3=0\end{array}\right\}$$

La recta de ecuación $\left.\begin{array}{l}2-x_1-x_2=0\\2-x_2+x_3=0\end{array}\right\}$ es invariante.

d) El plano perpendicular a esta recta invariante y que pasa por *P,* es un plano invariante de la transformación *f.* Por ser (1,-1,-1) el vector de la recta invariante de *f* y por ser la recta perpendicular al plano, la ecuación del plano es

$$x_1-x_2-x_3+k=0$$

y por contener a $P=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$$1-2+k=0\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

La ecuación del plano es

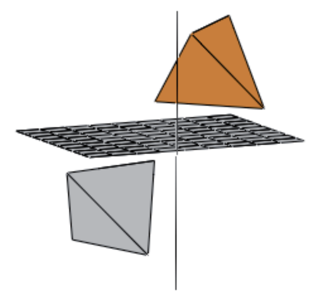
$$x_1-x_2-x_3-\frac{1}{2}=0$$

SIMETRÍA ROTACIONAL

Sea $G_r(X) = a + MX$ *una rotación alrededor de la recta* $r : X = P + \beta\vec{v}$, *un ángulo α y sea* $S_\pi(X) = c + LX$ *una simetría ortogonal respecto de un plano π ortogonal a r. La composición* $f = S_\pi \circ G_r$ *es una simetría rotacional y su expresión respecto de la referencia ortonormal R de* E_3, $f(X) = b + NX$.

Cumple:

- *f es una isometría.*
- *La aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal de matriz asociada* $N = L \cdot M$.
- *Su matriz N es ortogonal:* $NN^t = I$.
- *La aplicación f es biyectiva,* $\det(N) = -1$.
- *Existe la transformación inversa de f.*
- *Los autovalores de* $\hat{f}$ *son:*
  λ_1 *=-1 con multiplicidad 1 .*
  λ_2 *=cos(α)+isen(α) con multiplicidad 1 .*
  λ_3 *=cos(α)-isen(α) con multiplicidad 1 .*
- *El subespacio propio asociado a* λ_1 *=-1 está generado por el vector* $\vec{v}$ *de la recta r.*
- *f transforma puntos en puntos, rectas en rectas y planos en planos.*
- *f tiene un punto fijo* $P = r \cap \pi$.
- *La recta r es una recta invariante.*
- *El plano π es un plano invariante.*



7. ANEXO

En los apartados anteriores hemos hecho un recorrido por las distintas isometrías de *E₃,* definiéndolas, viendo sus características geométricas y determinando su expresión analítica. También hemos tenido que decidir, si una aplicación dada era isometría y en caso afirmativo indicar de qué tipo.

Los pasos seguidos para determinar si la aplicación afín *f,* cuya expresión respecto de la referencia ortonormal R es $f(X) = b + NX$ *,* es una isometría, son:

1. Calcular NN^t y así saber si la matriz N es ortogonal.
2. Si ocurre que $NN^t = I$ entonces la aplicación es una isometría.
3. Para determinar de qué tipo de isometría se trata, hallamos los puntos fijos de la aplicación afín *f.*
   Planteamos la ecuación de los puntos fijos

$$f(X) = X$$

$$b + NX = X \Rightarrow b = X - NX \Rightarrow b = IX - NX \Rightarrow b = (I - N)X$$

ó

$$(N - I)X = -b$$

que da lugar a un sistema de ecuaciones no homogéneo. La solución de este sistema representa el conjunto de puntos fijos de la aplicación. Si el sistema no tiene solución, es decir es incompatible, entonces no hay puntos fijos.

Con el fin de facilitar la clasificación de las isometrías en E_3 , se incluye el siguiente cuadro:

$$MM^t = I \Rightarrow \begin{cases} |M| = 1 \Rightarrow \begin{cases} M = I \Rightarrow f \text{ es una traslacion} \\ M \neq I \Rightarrow \begin{cases} \text{puntos fijos: una recta } r \Rightarrow f \text{ es una rotacion} \\ \text{puntos fijos: no tiene} \Rightarrow f \text{ es un movimiento helicoidal} \end{cases} \end{cases} \\ |M| = -1 \Rightarrow \begin{cases} \text{puntos fijos: no tiene} \Rightarrow f \text{ es simetria con deslizamiento} \\ \text{puntos fijos: un plano} \Rightarrow f \text{ es una simetria ortogonal} \\ \text{puntos fijos: un punto} \Rightarrow f \text{ es simetria rotacional} \end{cases} \end{cases}$$

P7.1. Dada la siguiente aplicación afín decidir si es una isometría y en caso afirmativo clasificarla.

$$f(X) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Solución

¿Es una isometría? La matriz de la aplicación lineal, N es

$$N=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow NN^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}^t=I$$

Por tanto es una isometría. ¿De qué tipo? Calculemos el determinante de la matriz $|N|=1$.

Hallemos los puntos fijos

$$X=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0=3\\-x_2+x_3=1\\-x_2-x_3=-1\end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones es incompatible, no tiene solución lo que significa que no hay puntos fijos.

La isometría *f* es un movimiento helicoidal.

P7.2 Dada la aplicación afín *f* decidir si es una isometría y en caso afirmativo clasificarla.

$$f(X)=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}X$$

Solución

¿Es una isometría? La matriz de la aplicación lineal, *N* es

$$N=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow NN^t=I$$

Es una isometría.

¿De qué tipo? Calculemos el determinante de la matriz: $|N|=-1$

Veamos si tiene puntos fijos

$$X=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}X\Rightarrow\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&-2\\2&-2&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}X=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes de este sistema es 1 y el rango de la matriz ampliada es 2 por tanto es un sistema incompatible, no tiene solución lo que significa que no hay puntos fijos.

Esta isometría es una simetría con deslizamiento.

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

